УДК 539.12

КВАНТОВЫЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОБЕРТЫВАЮЩИЕ АЛГЕБРЫ С ИДЕМПОТЕНТАМИ И РАЗЛОЖЕНИЯ ПИРСА

С.А. Дуплий[1], С.Д. Синельщиков[2]
[1]*Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина*
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
steven.a.duplij@univer.kharkov.ua, http://webusers.physics.umn.edu/~duplij
[2]*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина Национальной Академии Наук Украины*
Математическое отделение, просп. Ленина 47, Харьков 61103, Украина
sinelshchikov@ilt.kharkov.ua

Поступила в редакцию 15 января 2009 г.

Посвящается памяти нашего коллеги Л. Л. Ваксмана (1951 – 2007)

Введены и исследуются квантовые биалгебры с идемпотентами и образующими типа картановских со свойством регулярности фон Неймана, построенные на основе $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. На этих биалгебрах построены антиподы различного типа (как обратимые, так и регулярные по фон Нейману); тем самым задается структура соответственно алгебры Хопфа и алгебры фон Неймана-Хопфа. В некоторых частных случаях для них указан явный вид R-матриц, тоже как обратимых, так и регулярных по фон Нейману, причем в последнем случае R-матрицы подчинены разложению Пирса. Предложена конструкция конечномерных представлений рассмотренных алгебр.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: биалгебра, антипод, алгебра Хопфа , R-матрица, идемпотент, разложение Пирса, регулярность фон Неймана

В конце семидесятых годов изучение точно решаемых задач статистической механики и квантовой теории поля привело Л. Фаддеева и его сотрудников к созданию квантового метода обратной задачи рассеяния [1–3]. Ими было введено квантовое уравнение Янга-Бакстера и показано, что его решениям отвечают серии точно решаемых задач математической физики.

В 1984 году В. Дринфельд ввел квантовые аналоги универсальных обертывающих алгебр, и важным событием стал его доклад о квантовых группах на семинаре И. Гельфанда. В 1985 году к тем же квантовым аналогам универсальных обертывающих алгебр пришел М. Джимбо. Большую роль в становлении теории квантовых групп сыграли статьи [4, 5] и обзоры [6–8].

Другой путь к теории квантовых групп был найден С. Вороновичем [9, 10]. В дальнейшем его подход использовался при построении теории компактных квантовых групп [11–13]. Отметим также примеры алгебр Хопфа с антиподом конечного порядка больше двух, построенные в 1971 Тафтом [14] и Рэдфордом [15].

В последующие годы были найдены приложения теории квантовых групп в малоразмерной топологии и в теории категорий, а также в конформной квантовой теории поля [16–22].

В частности, язык алгебр Хопфа [23, 24] является важным средством изучения объектов, связанных с некоммутативными пространствами [25, 26] и суперпространствами [27–29], которые возникают посредством квантования соответствующих коммутативных объектов [30, 31]. Важной характеристикой суперсимметричных алгебраических структур является то, что соответствующие алгебры обычно содержат идемпотенты и другие делители нуля [32–35]. Поэтому целесообразным представляется введение идемпотентов в некоторые квантовые алгебры, с последующим изучением полученных объектов и связанных с ними разложений Пирса [36]. Целью настоящей работы является построение новых квантовых алгебр Хопфа, содержащих идемпотенты, исследование их свойств и соответствующих R-матриц.

АЛГЕБРЫ ХОПФА И $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

В настоящей работе вводятся новые квантовые алгебры, допускающие вложение $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ [37, 38]. После добавления некоторых дополнительных соотношений мы получаем две представляющие интерес алгебры, содержащие идемпотенты и регулярные по фон Нейману образующие картановского типа. Одна из этих алгебр имеет разложение Пирса, сводящееся к прямой сумме двух идеалов, и может рассматриваться как “расширение” алгебры с регулярным по фон Нейману антиподом, рассмотренной в [39, 40], в то время как другая алгебра оказывается алгеброй Хопфа в смысле стандартного определения [23]. Мы выделяем некоторые частные случаи, в которых R-матрицы имеют достаточно простой вид. В этом контексте строятся как обратимые, так и регулярные по фон Нейману R-матрицы, причем в последнем случае R-матрицы подчинены разложению Пирса.

Введем обозначения и напомним вкратце и основные факты об алгебрах Хопфа [23,41]. Мы будем под алгеброй $U^{(alg)}$ над $\mathbb{C}$ понимать четверку $(\mathbb{C}, A, \mu, \eta)$, где A – векторное пространство, $\mu : A\otimes A \to A$ – умножение (также обозначаемое $\mu(a\otimes b) = a\cdot b$), $\eta : \mathbb{C} \to A$ – единица, так что $\mathbf{1} \stackrel{def}{=} \eta(1), \mathbf{1} \in A, 1 \in \mathbb{C}$. Умножение предполагается ассоциативным $\mu\circ(\mu\otimes\mathsf{id}) = \mu\circ(\mathsf{id}\otimes\mu)$, при этом единица η характеризуется свойством $\mu\circ(\eta\otimes\mathsf{id}) = \mu\circ(\mathsf{id}\otimes\eta) = \mathsf{id}$. Морфизм алгебр – это линейное отображение $\psi : U_1^{(alg)} \to U_2^{(alg)}$, для которого $\psi\circ\mu_1 = \mu_2\circ(\psi\otimes\psi)$ и $\psi\circ\eta_1 = \eta_2$. Коалгебра $U^{(coalg)}$ – это четверка $(\mathbb{C}, C, \Delta, \epsilon)$, где C – векторное пространство, $\Delta : C \to C \otimes C$ – коумножение $\Delta(A) = \sum_i \left(A^i_{(1)} \otimes A^i_{(2)}\right)$ в обозначениях Свидлера, $\epsilon : C \to \mathbb{C}$ – коединица. Эти линейные отображения удовлетворяют следующим условиям: коассоциативность $(\Delta \otimes \mathsf{id}) \circ \Delta = (\mathsf{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ и свойство коединицы: $(\epsilon \otimes \mathsf{id}) \circ \Delta = (\mathsf{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta = \mathsf{id}$. Морфизм коалгебр – это линейное отображение $\varphi : U_1^{(coalg)} \to U_2^{(coalg)}$ такое, что $(\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta_1 = \Delta_2 \circ \varphi$ and $\epsilon_1 = \epsilon_2 \circ \varphi$. Биалгебра $U^{(bialg)}$ – это шестерка $(\mathbb{C}, B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, алгебра и коалгебра одновременно, причем выполнены следующие условия согласования

$$\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ (\mathsf{id} \otimes \tau \otimes \mathsf{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta), \quad \Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \epsilon \circ \mu = \mu_{\mathbb{C}} \circ (\epsilon \otimes \epsilon), \quad \epsilon(\mathbf{1}) = 1, \tag{1}$$

здесь τ – перестановка тензорных сомножителей, $\mu_{\mathbb{C}}$ – умножение в основном поле. Алгебра Хопфа $U^{(Hopf)}$ – это биалгебра, снабженная антиподом S, антиморфизмом алгебр, удовлетворяющим условию

$$(S \otimes \mathsf{id}) \circ \Delta = (\mathsf{id} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon. \tag{2}$$

Пусть $q \in \mathbb{C}$ и $q \neq \pm 1, 0$. Начнем с определения квантовой универсальной обертывающей алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ [42]. Это ассоциативная алгебра с единицей $U_q^{(alg)}(\mathfrak{sl}_2)$, которая определяется образующими Шевалле k, k^{-1}, e, f и соотношениями

$$k^{-1}k = 1, \quad kk^{-1} = 1, \quad ke = q^2 ek, \quad kf = q^{-2} fk, \quad ef - fe = \frac{k - k^{-1}}{q - q^{-1}}. \tag{3}$$

Стандартная структура алгебры Хопфа на $U_q^{(Hopf)}(\mathfrak{sl}_2)$ задается формулами

$$\Delta_0(k) = k \otimes k \tag{4}$$

$$\Delta_0(e) = \mathbf{1} \otimes e + e \otimes k, \qquad \Delta_0(f) = f \otimes \mathbf{1} + k^{-1} \otimes f, \tag{5}$$

$$\mathsf{S}_0(k) = k^{-1}, \qquad \mathsf{S}_0(e) = -ek^{-1}, \qquad \mathsf{S}_0(f) = -kf, \tag{6}$$

$$\varepsilon_0(k) = 1, \qquad \varepsilon_0(e) = \varepsilon_0(f) = 0. \tag{7}$$

Алгебра $U_q^{(alg)}(\mathfrak{sl}_2)$ является областью целостности, т.е. не имеет делителей нуля и, в частности, идемпотентов [43, 44]. Базис векторного пространства $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ образуют мономы $k^s e^m f^n$, где $m, n \geq 0$ [38]. Обозначим $\mathcal{H}_0(\mathbf{1}, k, k^{-1})$ картановскую подалгебру алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

КАРТАНОВСКАЯ ПОДАЛГЕБРА И ЕЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПИРСА

Мы собираемся рассмотреть разложение Пирса для подходящего подходящего расширения алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Хорошо известно, что существует взаимно однозначное соответствие между центральными разложениями единицы в сумму идемпотентов и разложениями модуля в прямую сумму [36]. Поэтому начнем с видоизменения картановской подалгебры в $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ с целью реализации свойства регулярности фон Неймана [45–47].

Для этого рассмотрим образующие K, $\overline{K}$, удовлетворяющие соотношениям

$$K\overline{K}K = K, \qquad \overline{K}K\overline{K} = \overline{K}, \tag{8}$$

которые называют свойством регулярности фон Неймана [45]. При условии коммутативности

$$K\overline{K} = \overline{K}K \tag{9}$$

имеется идемпотент $P \stackrel{def}{=} K\overline{K} = \overline{K}K$, для которого

$$PK = KP = K, \tag{10}$$

$$P^2 = P. \tag{11}$$

Коммутативная алгебра, порожденная K, $\overline{K}$ (мы обозначаем ее $\mathcal{H}(K, \overline{K})$) не содержит единицы, поскольку, в отличие от $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, ее соотношения не предусматривают единицу явно, как в (3). Отметим, что $\mathcal{H}(K, \overline{K})$ рассматривалась в качестве подалгебры типа картановской в аналоге квантовой обертывающей алгебры $U_q^v = \mathfrak{vsl}_q(2)$ с регулярным по фон Нейману антиподом, введенной в работе Дуплия и Ли [39, 40]. Соответствующая подалгебра с единицей, получаемая внешним присоединением единичного элемента $\mathcal{H}(\mathbf{1},K,\overline{K}) \stackrel{def}{=} \mathcal{H}(K,\overline{K}) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$, также рассмотрена в [39, 40] как подалгебра алгебры $U_q^w = \mathfrak{wsl}_q(2)$.

Заметим, что $\mathcal{H}(\mathbf{1},K,\overline{K})$ содержит еще один идемпотент $(\mathbf{1}-P)^2 = (\mathbf{1}-P)$. Поэтому рассмотрим еще один экземпляр этой же алгебры (обозначим его $\mathcal{H}(L,\overline{L})$) с образующими L и $\overline{L}$, подчиненными соотношениям, подобным тем, которым удовлетворяют K, $\overline{K}$ (см. выше (8)):

$$L\overline{L}L = L, \qquad \overline{L}L\overline{L} = \overline{L}. \tag{12}$$

При условии коммутативности

$$L\overline{L} = \overline{L}L \tag{13}$$

идемпотент $Q \stackrel{def}{=} L\overline{L} = \overline{L}L$ удовлетворяет соотношениям

$$QL = LQ = L, \tag{14}$$

$$Q^2 = Q. \tag{15}$$

При отсутствии дополнительных соотношений между $K,\overline{K}$ и $L,\overline{L}$, алгебры без единицы $\mathcal{H}(K,\overline{K})$ и $\mathcal{H}(L,\overline{L})$ могут образовывать лишь свободное произведение. Мы же сливаем алгебры с единицей $\mathcal{H}(\mathbf{1},K,\overline{K})$ и $\mathcal{H}(\mathbf{1},L,\overline{L})$ таким образом, что их единицы совмещаются, и добавляем еще одно соотношение, представляющее собой разложение единицы в сумму идемпотентов,

$$P + Q = \mathbf{1} \tag{16}$$

и тем самым получаем разложение Пирса [36] возникающей таким образом алгебры $\mathcal{H}(\mathbf{1},K,\overline{K},L,\overline{L})$. Она сводится к прямой сумме, поскольку $QP = PQ = 0$.

Как видно из (10), (14) и (16),

$$KL = \overline{L}K = LK = K\overline{L} = \overline{K}L = L\overline{K} = 0. \tag{17}$$

Введение новых (по сравнению с [39, 40]) необратимых образующих L, $\overline{L}$ оправдывается тем, что при всех $a, b \in R\diagdown\{0\}$ элемент $aK + bL$ обратим, причем обратный элемент имеет вид $a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L}$. Действительно, непосредственное вычисление с использованием (16) и (17) дает

$$(aK + bL)(a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L}) = K\overline{K} + L\overline{L} = P + Q = \mathbf{1}. \tag{18}$$

Это позволяет рассмотреть двухпараметрическое семейство морфизмов картановских подалгебр

$$\mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}^{(a,b)} \quad : \quad \mathcal{H}_0(\mathbf{1},k,k^{-1}) \to \mathcal{H}(\mathbf{1},K,\overline{K},L,\overline{L}), \tag{19}$$

$$k \quad \mapsto \quad aK + bL, \qquad k^{-1} \mapsto a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L}. \tag{20}$$

Важное замечание состоит в том, что отображение $\Phi_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$ является вложением, т.е. $\ker \Phi_{\mathcal{H}}^{(a,b)} = 0$. Чтобы увидеть это, воспользуемся (19) и определим гомоморфизм $\bar{\mathbf{\Phi}}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$ свободной алгебры $\bar{\mathcal{H}}_0(\mathbf{1},k,k^{-1})$, порожденной образующими $\mathbf{1}$, k, k^{-1}, в свободную алгебру $\bar{\mathcal{H}}(\mathbf{1},K,\overline{K},L,\overline{L})$ с образующими $\mathbf{1}$, K, $\overline{K}$, L, $\overline{L}$. Покажем, что $\bar{\mathbf{\Phi}}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$ – вложение. Действительно, в противном случае $\bar{\mathbf{\Phi}}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$ переводило бы в нуль некоторый ненулевой элемент из $\bar{\mathcal{H}}_0(\mathbf{1},k,k^{-1})$. Этот элемент можно рассматривать как “некоммутативный полином” от трех переменных $\mathbf{1}$, k, k^{-1}. Поскольку линейная замена переменных (19) невырождена, мы получаем нетривиальный полином от $\mathbf{1}$, K, $\overline{K}$, L, $\overline{L}$, который не может быть нулем в свободной алгебре $\bar{\mathcal{H}}(\mathbf{1},K,\overline{K},L,\overline{L})$. Остается заметить, что отображение $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между соотношениями в алгебре $\mathcal{H}_0(\mathbf{1},k,k^{-1})$ и соотношениями, индуцируемыми на образе $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$, откуда следует наше утверждение для морфизма $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$ между фактор-алгебрами $\mathcal{H}_0(\mathbf{1},k,k^{-1})$ и $\mathcal{H}(\mathbf{1},K,\overline{K},L,\overline{L})$.

АЛГЕБРЫ $U_{K,L,norm}^{(alg)}$ И $U_{K,L,twist}^{(alg)}$ И ВЛОЖЕНИЕ В НИХ $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Теперь мы можем добавить две новых образующих E и F, а также дополнительные соотношения

$$(aK + bL)E = q^2E(aK + bL), \tag{21}$$

$$(a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L})E = q^{-2}E(a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L}), \tag{22}$$

$$(aK + bL)F = q^{-2}F(aK + bL), \tag{23}$$

$$(a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L})F = q^2F(a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L}), \tag{24}$$

$$EF - FE = \frac{(aK + bL) - (a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L})}{q - q^{-1}} \tag{25}$$

которые, наряду с (8) – (9) и (12) – (13), определяют алгебру, обозначаемую нами $U^{(alg)22}_{aK+bL}$. Здесь индексы 22 означают число образующих в левой (соответственно, в правой) части соотношений между образующими картановского типа (K, L) и образующими E, F. Эта алгебра соответствует алгебре $U^w_q = \mathfrak{wsl}_q(2)$, введенной в [39, 40]. Точнее говоря, существует гомоморфизм алгебр $\mathfrak{wsl}_q(2) \to U^{(alg)22}_{aK+bL}$, который в обозначениях работы [39] задается следующим образом:

$$K_w \mapsto aK + bL, \qquad \overline{K}_w \mapsto a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L}, \qquad E_w \mapsto E, \qquad F_w \mapsto F. \tag{26}$$

Как видно из обратимости элемента $aK + bL$, наряду с (21) – (25), образ этого гомоморфизма изоморфен $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ (подробнее см. [39, Предложение 1]).

Теперь предъявим аналог алгебры $U^v_q = \mathfrak{vsl}_q(2)$ из работы [39]. Таковым представляется алгебра с теми же образующими, что и алгебра $U^{(alg)22}_{aK+bL}$ и определяющими соотношениями (дополняющими (8) – (9) и (12) – (13))

$$(aK + bL)E(a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L}) = q^2E, \tag{27}$$
$$(a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L})E(aK + bL) = q^{-2}E, \tag{28}$$
$$(aK + bL)F(a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L}) = q^{-2}F, \tag{29}$$
$$(a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L})F(aK + bL) = q^2F, \tag{30}$$
$$EF - FE = \frac{(aK + bL) - (a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L})}{q - q^{-1}}. \tag{31}$$

Эту алгебру мы обозначим $U^{(alg)31}_{aK+bL}$. Она соответствует алгебре $U^v_q = \mathfrak{vsl}_q(2)$ из работы [39] в том смысле, что существует гомоморфизм алгебр $\mathfrak{vsl}_q(2) \to U^{(alg)31}_{aK+bL}$. Как и выше, этот гомоморфизм в обозначениях работы [39] задается на образующих формулами (26) при условии замены в них индексов w индексами v. Аналогичным образом, как и выше можно заметить, что образ этого гомоморфизма изоморфен алгебре $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ (см. [39, Предложение 1]).

Рассмотрим продолжение $\mathbf{\Phi}^{(a,b)}$ морфизма $\mathbf{\Phi}^{(a,b)}_{\mathcal{H}}$ до морфизма алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ со значениями в $U^{(alg)22}_{aK+bL}$ и в $U^{(alg)31}_{aK+bL}$:

$$\Phi^{(a,b)} : \begin{cases} k \to aK + bL, \quad k^{-1} \to a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L}, \\ \qquad e \to E, \quad f \to F. \end{cases} \tag{32}$$

Отметим, что алгебры $U^{(alg)22}_{aK+bL}$ и $U^{(alg)31}_{aK+bL}$ изоморфны алгебрам $U^{(alg)22}_{K+L} \stackrel{def}{=} U^{(alg)22}_{aK+bL}\Big|_{a=1,b=1}$ и $U^{(alg)31}_{K+L} \stackrel{def}{=} U^{(alg)31}_{aK+bL}\Big|_{a=1,b=1}$, соответственно. Требуемый изоморфизм $\mathbf{\Psi} : U^{(alg)22,31}_{K+L} \to U^{(alg)22,31}_{aK+bL}$ имеет вид $K \mapsto aK$, $L \mapsto bL$, $\overline{K} \mapsto a^{-1}\overline{K}$, $\overline{L} \mapsto b^{-1}\overline{L}$, $E \mapsto E$, $F \mapsto F$. Поэтому в дальнейшем мы не рассматриваем параметры a и b (полагая их равными единице).

В алгебрах $U^{(alg)22}_{K+L}$ и $U^{(alg)31}_{K+L}$ идемпотенты P и Q не являются центральными. Поэтому необходимо "развалить" соотношения (21) – (25) и (27) – (31) таким образом, что либо P и Q становятся центральными

$$PE = EP, \qquad QE = EQ, \tag{33}$$
$$PF = FP, \qquad QF = FQ, \tag{34}$$

либо удовлетворяют условию "сплетения"

$$PE = EQ, \qquad QE = EP, \tag{35}$$
$$PF = FQ, \qquad QF = FP. \tag{36}$$

Точнее говоря, мы добавим указанные выше соотношения к общему списку соотношений, получив тем самым факторалгебры алгебр $U^{(alg)22}_{K+L}$ и $U^{(alg)31}_{K+L}$. Ниже приводятся списки соотношений для "расщепленных" 22-алгебр. Определяющие соотношения для алгебр $U^{(alg)22}_{K,L,norm}$ имеют вид

$$\begin{array}{llll} K\overline{K}K = K, & \overline{K}K\overline{K} = \overline{K}, & K\overline{K} = \overline{K}K, & \\ L\overline{L}L = L, & \overline{L}L\overline{L} = \overline{L}, & L\overline{L} = \overline{L}L, & \\ KE = q^2EK, & \overline{K}E = q^{-2}E\overline{K}, & LE = q^2EL, & \overline{L}E = q^{-2}E\overline{L}, \quad (37) \\ KF = q^{-2}FK, & \overline{K}F = q^2F\overline{K}, & LF = q^{-2}FL, & \overline{L}F = q^2F\overline{L}, \end{array}$$

$$EF - FE = \frac{(K+L) - (\overline{K} + \overline{L})}{q - q^{-1}}.$$

Еще одна "расщепленная" 22-алгебра $U_{K,L,twist}^{(alg)22}$ задается так

$$\begin{array}{llll}
K\overline{K}K = K, & \overline{K}K\overline{K} = \overline{K}, & K\overline{K} = \overline{K}K, & \\
L\overline{L}L = L, & \overline{L}L\overline{L} = \overline{L}, & L\overline{L} = \overline{L}L, & \\
KE = q^2 EL, & \overline{K}E = q^{-2}E\overline{L}, & LE = q^2 EK, & \overline{L}E = q^{-2}E\overline{K}, \\
KF = q^{-2}FL, & \overline{K}F = q^2 F\overline{L}, & LF = q^{-2}FK, & \overline{L}F = q^2 F\overline{K},
\end{array} \quad (38)$$

$$EF - FE = \frac{(K+L) - (\overline{K} + \overline{L})}{q - q^{-1}}.$$

Аналогичным образом описываются "расщепленные" 31-алгебры. Определяющие соотношения для алгебры $U_{K,L,norm}^{(alg)31}$ имеют вид

$$\begin{array}{llll}
K\overline{K}K = K, & \overline{K}K\overline{K} = \overline{K}, & K\overline{K} = \overline{K}K = P, & \\
L\overline{L}L = L, & \overline{L}L\overline{L} = \overline{L}, & L\overline{L} = \overline{L}L = Q, & \\
KE\overline{K} = q^2 EP, & \overline{K}EK = q^{-2}EP, & LE\overline{L} = q^2 EQ, & \overline{L}EL = q^{-2}EQ, \\
KF\overline{K} = q^{-2}FP, & \overline{K}FK = q^2 FP, & LF\overline{L} = q^{-2}FQ, & \overline{L}FL = q^2 FQ,
\end{array}$$

$$P(EF - FE) = \frac{K - \overline{K}}{q - q^{-1}}, \qquad Q(EF - FE) = \frac{L - \overline{L}}{q - q^{-1}},$$

а для алгебры $U_{K,L,twist}^{(alg)31}$ –

$$\begin{array}{llll}
K\overline{K}K = K, & \overline{K}K\overline{K} = \overline{K}, & K\overline{K} = \overline{K}K = P, & \\
L\overline{L}L = L, & \overline{L}L\overline{L} = \overline{L}, & L\overline{L} = \overline{L}L = Q, & \\
KE\overline{L} = q^2 EQ, & \overline{K}EL = q^{-2}EQ, & LE\overline{K} = q^2 EP, & \overline{L}EK = q^{-2}EP, \\
KF\overline{L} = q^{-2}FQ, & \overline{K}FL = q^2 FQ, & LF\overline{K} = q^{-2}FP, & \overline{L}FK = q^2 FP,
\end{array}$$

$$P(EF - FE) = \frac{K - \overline{K}}{q - q^{-1}}, \qquad Q(EF - FE) = \frac{L - \overline{L}}{q - q^{-1}}.$$

Новые соотношения эквивалентны соотношениям для алгебр $U_{K+L}^{(alg)22}$ и $U_{K+L}^{(alg)31}$ вместе с "расщепляющими" соотношениями (33) – (36). Процедура вывода новых соотношений в большинстве случаев сводится к умножению на идемпотенты P и Q с последующим использованием (17). Наоборот, пусть даны новые соотношения. Для проверки центральности идемпотента P в случае алгебры $U_{K,L,norm}^{(alg)31}$ воспользуемся (17)

$$PE = K\overline{K}E(P+Q) = K(\overline{K}EK)\overline{K} + K\overline{K}(EL\overline{L}) =$$
$$= K(q^{-2}EK\overline{K})\overline{K} + K\overline{K}(q^{-2}LE\overline{L}) = q^{-2}KE\overline{K} + 0 = EK\overline{K} = EP.$$

Разумеется, подобные соображения применимы также и при осуществлении остальных проверок.

Покажем, что для "расщепленных" алгебр имеют место следующие изоморфизмы: $U_{K,L,norm}^{(alg)22} \cong U_{K,L,norm}^{(alg)31}$, и $U_{K,L,twist}^{(alg)22} \cong U_{K,L,twist}^{(alg)31}$. В самом деле, в каждом из случаев (нормальном и сплетенном), соответствующие идеалы соотношений в каждой из пар алгебр, объявленных изоморфными, совпадают. Например, умножая справа соотношение $KE = q^2 EK$ в $U_{K,L,norm}^{(alg)22}$ на $\overline{K}$, получаем соотношение $KE\overline{K} = q^2 EP$ в алгебре $U_{K,L,norm}^{(alg)31}$. Наоборот, стартуя с соотношения $KE\overline{K} = q^2 EP$ в $U_{K,L,norm}^{(alg)31}$, имеем $KE = K(PE) = K(EP) = (KE\overline{K})K = (q^2 EP)K = q^2 EK$, что дает соотношение в $U_{K,L,norm}^{(alg)22}$. Умножая соотношения между E и F в алгебрах $U_{K,L,norm}^{(alg)22}$, $U_{K,L,twist}^{(alg)22}$ на P и на Q, получаем соотношения между E и F в алгебрах $U_{K,L,norm}^{(alg)31}$, $U_{K,L,twist}^{(alg)31}$. Наоборот, суммируя соотношения между E и F в $U_{K,L,norm}^{(alg)31}$ и используя (16), получаем соотношение между E и F в алгебре $U_{K,L,norm}^{(alg)22}$. Подобные соображения позволяют установить также и второй изоморфизм. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь алгебры $U_{K,L,norm}^{(alg)22}$, $U_{K,L,twist}^{(alg)22}$, опуская при этом 22 в верхнем индексе.

Продолжим морфизм $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}$ до морфизма со значениями в ”расщепленных” алгебрах $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ и $U^{(alg)}_{K,L,twist}$ следующим образом:

$$\mathbf{\Phi}:\begin{cases} k\mapsto K+L, & k^{-1}\mapsto \overline{K}+\overline{L},\\ e\mapsto E, & f\mapsto F. \end{cases} \tag{39}$$

К построенному продолжению применимы те же соображения, что и к исходному морфизму $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}$, которые показывают, что отображение $\mathbf{\Phi}$, определенное выше на образующих, допускает продолжение до корректно определенного морфизма алгебр из $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ в каждую из алгебр $U^{(alg)}_{K,L,norm}$, $U^{(alg)}_{K,L,twist}$. Такое продолжение является вложением. В качестве тривиального следствия заметим, что каждая из алгебр $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ и $U^{(alg)}_{K,L,twist}$ содержит $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ в качестве подалгебры.

Разложение Пирса алгебры $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ имеет вид

$$U^{(alg)}_{K,L,norm}=PU^{(alg)}_{K,L,norm}P+QU^{(alg)}_{K,L,norm}Q, \tag{40}$$

т.е. сводится к разложению в прямую сумму двух идеалов. Таким образом, $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ является прямой суммой двух подалгебр, каждая из которых изоморфна $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Указанный изоморфизм задается следующим образом

$$K\mapsto k\oplus 0, \overline{K}\mapsto k^{-1}\oplus 0, PE\mapsto e\oplus 0, PF\mapsto f\oplus 0, L\mapsto 0\oplus k, \overline{L}\mapsto 0\oplus k^{-1}, QE\mapsto 0\oplus e, QF\mapsto 0\oplus f, \tag{41}$$

следовательно, $P\mapsto \mathbf{1}\oplus 0$, $Q\longmapsto 0\oplus\mathbf{1}$. Этот морфизм распадается в прямую сумму двух морфизмов, причем каждый из последних, очевидно, является изоморфизмом.

В ”сплетенном” случае разложение Пирса

$$U^{(alg)}_{K,L,twist}=PU^{(alg)}_{K,L,twist}P+PU^{(alg)}_{K,L,twist}Q+QU^{(alg)}_{K,L,twist}P+QU^{(alg)}_{K,L,twist}Q \tag{42}$$

нетривиально (все члены ненулевые), так что (42) не является прямой суммой идеалов.

ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСОВ ПУАНКАРЕ-БИРКГОФА-ВИТТА

Базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта алгебры $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ образован мономами

$$\left[\left\{PK^iE^jF^k\right\}_{i,j,k\geq 0}\cup\left\{\overline{K}^iE^jF^k\right\}_{i>0,j,k\geq 0}\right]\cup\left[\left\{QL^iE^jF^k\right\}_{i,j,k\geq 0}\cup\left\{\overline{L}^iE^jF^k\right\}_{i>0,j,k\geq 0}\right], \tag{43}$$

что следует из разложения Пирса для $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ и [38].

В ”сплетенном” случае $U^{(alg)}_{K,L,twist}$ имеется разложение в прямую сумму 4 векторных подпространств (42). Ниже приведен базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта алгебры $U^{(alg)}_{K,L,twist}$, который подчинен этому разложению и образован мономами

$$\begin{aligned}&\left[\left\{PK^iE^jF^k\right\}_{\substack{i,j,k\geq 0\\ j+k=even}}\cup\left\{\overline{K}^iE^jF^k\right\}_{\substack{i>0,j,k\geq 0\\ j+k=even}}\right]\\ \cup&\left[\left\{PK^iE^jF^k\right\}_{\substack{i,j,k\geq 0\\ j+k=odd}}\cup\left\{\overline{K}^iE^jF^k\right\}_{\substack{i>0,j,k\geq 0\\ j+k=odd}}\right]\\ \cup&\left[\left\{QL^iE^jF^k\right\}_{\substack{i,j,k\geq 0\\ j+k=odd}}\cup\left\{\overline{L}^iE^jF^k\right\}_{\substack{i>0,j,k\geq 0\\ j+k=odd}}\right]\\ \cup&\left[\left\{QL^iE^jF^k\right\}_{\substack{i,j,k\geq 0\\ j+k=even}}\cup\left\{\overline{L}^iE^jF^k\right\}_{\substack{i>0,j,k\geq 0\\ j+k=even}}\right].\end{aligned} \tag{44}$$

Рассмотрим классический предел алгебр $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ и $U^{(alg)}_{K,L,twist}$ при $q\to 1$. Как следствие вышеизложенного, можем сделать вывод, что классический предел для алгебр $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ представляет собой прямую сумму двух экземпляров классических пределов для $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ в смысле [48].

СТРУКТУРА БИАЛГЕБР И ОБОБЩЕННЫЕ АНТИПОДЫ

Обратимся теперь к построению биалгебр, соответствующих алгебрам $U_{K,L,norm}^{(alg)}$ и $U_{K,L,twist}^{(alg)}$. Прежде всего для построения структуры биалгебры на U_{K+L} нужна коединица ε. Поскольку P и Q являются идемпотентами, то $\varepsilon(P)(\varepsilon(P)-1)=0$ и $\varepsilon(Q)(\varepsilon(Q)-1)=0$, откуда следует, что либо $\varepsilon(P)=1$, $\varepsilon(Q)=0$, либо $\varepsilon(P)=0$, $\varepsilon(Q)=1$. Мы предполагаем первую из двух возможностей. Тогда из $L=QL$ следует, что $\varepsilon(L)=\varepsilon(QL)=0$. Используем вложение $\mathbf{\Phi}$, определенное в (19), и стандартные соотношения (4), (5), (7) для перенесения коумножения и коединицы на образ $\mathbf{\Phi}$ (32) следующим образом

$$\Delta(K+L)=(K+L)\otimes(K+L), \tag{45}$$
$$\Delta(\overline{K}+\overline{L})=(\overline{K}+\overline{L})\otimes(\overline{K}+\overline{L}), \tag{46}$$
$$\Delta(E)=\mathbf{1}\otimes E+E\otimes(K+L), \tag{47}$$
$$\Delta(F)=F\otimes\mathbf{1}+(\overline{K}+\overline{L})\otimes F, \tag{48}$$
$$\varepsilon(E)=\varepsilon(F)=0, \tag{49}$$
$$\varepsilon(K+L)=1, \tag{50}$$
$$\varepsilon(\overline{K}+\overline{L})=1. \tag{51}$$

Для построения коумножения на алгебрах $U_{K,L,norm}^{(alg)}$ и $U_{K,L,twist}^{(alg)}$ используем сначала (45) – (51) для переноса коумножения Δ на $\mathbf{\Phi}\left(U_q^{(alg)}(\mathfrak{sl}_2)\right)$ с $U_q^{(alg)}(\mathfrak{sl}_2)$), а затем продолжим его на алгебры $U_{K,L,norm}^{(alg)}$ и $U_{K,L,twist}^{(alg)}$ следующим образом. В случае $U_{K,L,norm}^{(coalg)}$ получаем

$$\begin{aligned}
&\Delta(K)=K\otimes K, && \Delta(\overline{K})=\overline{K}\otimes\overline{K},\\
&\Delta(L)=L\otimes L+L\otimes K+K\otimes L, &&\\
&\Delta(\overline{L})=\overline{L}\otimes\overline{L}+\overline{L}\otimes\overline{K}+\overline{K}\otimes\overline{L}, &&\\
&\Delta(E)=\mathbf{1}\otimes E+E\otimes(K+L), &&\\
&\Delta(F)=F\otimes\mathbf{1}+(\overline{K}+\overline{L})\otimes F, &&\\
&\varepsilon(E)=\varepsilon(F)=\varepsilon(L)=\varepsilon(\overline{L})=0, && \varepsilon(K)=\varepsilon(\overline{K})=1,
\end{aligned} \tag{52}$$

а в случае $U_{K,L,twist}^{(coalg)}$

$$\begin{aligned}
&\Delta(K)=K\otimes K+L\otimes L, && \Delta(\overline{K})=\overline{K}\otimes\overline{K}+\overline{L}\otimes\overline{L},\\
&\Delta(L)=L\otimes K+K\otimes L, && \Delta(\overline{L})=\overline{L}\otimes\overline{K}+\overline{K}\otimes\overline{L}\\
&\Delta(E)=\mathbf{1}\otimes E+E\otimes(K+L), &&\\
&\Delta(F)=F\otimes\mathbf{1}+(\overline{K}+\overline{L})\otimes F, &&\\
&\varepsilon(E)=\varepsilon(F)=\varepsilon(L)=\varepsilon(\overline{L})=0, && \varepsilon(K)=\varepsilon(\overline{K})=1.
\end{aligned}$$

Операция свертки на полученных таким образом биалгебрах $U_{K,L,norm}^{(bialg)}$ и $U_{K,L,twist}^{(bialg)}$ определяется стандартно

$$(\mathsf{A}\star\mathsf{B})\equiv\mu(\mathsf{A}\otimes\mathsf{B})\Delta, \tag{53}$$

где A, B – линейные эндоморфизмы соответствующих векторных пространств.

Сначала рассмотрим биалгебру $U_{K,L,norm}^{(bialg)}$ с точки зрения возможности построения на ней структуры алгебры Хопфа. Отметим, что на биалгебре $U_{K,L,norm}^{(bialg)}$ не существует антипода S, удовлетворяющего стандартной аксиоме алгебры Хопфа

$$\mathsf{S}\star\mathsf{id}=\mathsf{id}\star\mathsf{S}=\eta\circ\varepsilon. \tag{54}$$

Действительно, если бы такой антипод существовал, то, ввиду $\varepsilon(P)=1$ и $\Delta(P)=P\otimes P$, мы получили бы

$$(\mathsf{S}\star\mathsf{id})(P)=\mathsf{S}(P)P=(\mathsf{id}\star\mathsf{S})(P)=P\mathsf{S}(P)=\mathbf{1}\cdot\varepsilon(P)=\mathbf{1}, \tag{55}$$

что невозможно, поскольку P необратим.

Рассмотрим антиморфизм T на $U_{K,L,norm}^{(bialg)}$, определенный следующим образом

$$\mathsf{T}(K)=\overline{K},\qquad \mathsf{T}(\overline{K})=K,\qquad \mathsf{T}(L)=\overline{L},\qquad \mathsf{T}(\overline{L})=L, \tag{56}$$
$$\mathsf{T}(E)=-E(\overline{K}+\overline{L}),\qquad \mathsf{T}(F)=-(K+L)F. \tag{57}$$

Заметим, что на образующих $U^{(bialg)}_{K,L,norm}$

$$(\mathsf{T}\star\mathsf{id})(K) = (\mathsf{id}\star\mathsf{T})(K) = (\mathsf{T}\star\mathsf{id})(\overline{K}) = (\mathsf{id}\star\mathsf{T})(\overline{K}) = P, \tag{58}$$

$$(\mathsf{T}\star\mathsf{id})(L) = (\mathsf{id}\star\mathsf{T})(L) = (\mathsf{T}\star\mathsf{id})(\overline{L}) = (\mathsf{id}\star\mathsf{T})(\overline{L}) = Q, \tag{59}$$

$$(\mathsf{T}\star\mathsf{id})(E) = (\mathsf{id}\star\mathsf{T})(E) = (\mathsf{T}\star\mathsf{id})(F) = (\mathsf{id}\star\mathsf{T})(F) = 0. \tag{60}$$

Для T основное свойство антипода заменяется следующим свойством регулярности, а именно: антиморфизм T на $U^{(bialg)}_{K,L,norm}$ является регулярным по фон Нейману:

$$\mathsf{id}\star\mathsf{T}\star\mathsf{id} = \mathsf{id}, \qquad \mathsf{T}\star\mathsf{id}\star\mathsf{T} = \mathsf{T}. \tag{61}$$

Для проверки этого свойства заметим, что свертка линейных отображений является линейным отображением, так что достаточно проверить (61) отдельно на каждом из прямых слагаемых $PU^{(bialg)}_{K,L,norm}$ и $QU^{(bialg)}_{K,L,norm}$, связанных с центральными идемпотентами P и Q, соответственно. Начнем с $PU^{(bialg)}_{K,L,norm}$, являющегося подбиалгеброй. Обозначим через $\varphi_P : PU^{(bialg)}_{K,L,norm} \to U_q(\mathfrak{sl}_2)$ изоморфизм (41). Ранее он рассматривался как изоморфизм алгебр (и потому он сплетает умножения, $\varphi_P \circ \mu \circ \left(\varphi_P^{-1} \otimes \varphi_P^{-1}\right) = \mu_0 = \mu_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}$), но теперь, как видно из (52) и $\Delta(P) = P \otimes P$, морфизм φ_P сплетает также коумножение (4) – (5) на $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ и ограничение коумножения Δ биалгебры $U^{(bialg)}_{K,L,norm}$ на $PU^{(bialg)}_{K,L,norm}$, то есть $(\varphi_P \otimes \varphi_P) \circ \Delta \circ \varphi_P^{-1} = \Delta_0$. Отсюда следует, что для двух линейных эндоморфизмов векторного пространства $U^{(bialg)}_{K,L,norm}$, оставляющих подпространство $PU^{(bialg)}_{K,L,norm}$ инвариантным, φ_P переводит их свертку (ограниченную на $PU^{(bialg)}_{K,L,norm}$) в свертку перенесенных отображений на $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Проверка показывает, что и id, и T оставляют $PU^{(bialg)}_{K,L,norm}$ инвариантным, и дальнейший анализ демонстрирует, что тем же свойством обладают $\mathsf{id}\star\mathsf{T}$ и $\mathsf{T}\star\mathsf{id}$, а именно,

$$(\mathsf{id}\star\mathsf{T})(PX) = (\mathsf{T}\star\mathsf{id})(PX) = \varepsilon_0(\varphi_P(PX))P$$

для любого $X \in U^{(bialg)}_{K,L,norm}$. Это означает, что φ_P устанавливает эквивалентность соотношений (61) на $PU^{(bialg)}_{K,L,norm}$ и условием регулярности фон Неймана для отображения T, перенесенного посредством φ_P на $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Легко проверяется, что это перенесенное отображение есть не что иное, как S, антипод на $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Как хорошо известно, S также удовлетворяет условию регулярности фон Неймана, откуда следует (61) в ограничении на $PU^{(bialg)}_{K,L,norm}$.

В этом рассуждении можно заменить φ_P изоморфизмом $\mathbf{\Phi}^{-1} : \mathbf{\Phi}(U_q(\mathfrak{sl}_2)) \to U_q(\mathfrak{sl}_2)$, где $\mathbf{\Phi}$ – вложение (39). Тем самым получаем (61) ограниченное на $\mathbf{\Phi}(U_q(\mathfrak{sl}_2))$. Однако эта техника неприменима к $QU^{(bialg)}_{K,L,norm}$, поскольку последняя не является подкоалгеброй.

Заметим, что проекция $\mathbf{\Phi}(U_q(\mathfrak{sl}_2))$ в прямое слагаемое $QU^{(bialg)}_{K,L,norm}$ совпадает с $QU^{(bialg)}_{K,L,norm}$. Это связано с тем, что базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта $\left\{k^i e^j f^k\right\}_{j,k\geq 0}$ алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, перенесенный посредством $\mathbf{\Phi}$, имеет вид

$$\left\{(K+L)^i E^j F^k\right\}_{i,j,k\geq 0} \cup \left\{(\overline{K}+\overline{L})^i E^j F^k\right\}_{i>0,j,k\geq 0}.$$

Эти векторы проектируются в $QU^{(bialg)}_{K,L,norm}$ в векторы

$$\left\{QL^i E^j F^k\right\}_{i,j,k\geq 0} \cup \left\{\overline{L}^i E^j F^k\right\}_{i>0,j,k\geq 0},$$

которые, как было показано выше, образуют базис в $QU^{(bialg)}_{K,L,norm}$. Таким образом, для заданного $X \in U^{(bialg)}_{K,L,norm}$ найдется $x \in U_q(\mathfrak{sl}_2)$ такой, что $QX = Q\mathbf{\Phi}(x)$. Используя это, получаем

$$(\mathsf{id}\star\mathsf{T}\star\mathsf{id})(QX) = (\mathsf{id}\star\mathsf{T}\star\mathsf{id})((\mathbf{1}-P)\mathbf{\Phi}(x)) = \mathbf{\Phi}(x) - P\mathbf{\Phi}(x) = Q\mathbf{\Phi}(x) = QX.$$

Разумеется, подобные вычисления применимы и к проверке второй части (61), что завершает его проверку на $QU^{(bialg)}_{K,L,norm}$, а, следовательно, и на всем $U^{(bialg)}_{K,L,norm}$. Назовем антиморфизм T со свойством (61) антиподом, регулярным по фон Нейману, и назовем биалгебру с антиподом, регулярным по фон Нейману, алгеброй фон Неймана-Хопфа.

С другой стороны, стандартная алгебра Дринфельда-Джимбо $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ (которая является областью целостности [38]) не допускает вложения $U^{(bialg)}_{K,L,norm}$, т.к. последняя содержит делители нуля (см., например, (16)).

Рассмотрим возможность построения структуры алгебры Хопфа на $U^{(bialg)}_{K,L,twist}$. Определим антиморфизм S алгебры $U^{(bialg)}_{K,L,twist}$ теми же формулами, что и (56) – (57):

$$\mathsf{S}(K) = \overline{K},\ \ \mathsf{S}(\overline{K}) = K,\ \ \mathsf{S}(L) = \overline{L},\ \ \mathsf{S}(\overline{L}) = L,\ \ \mathsf{S}(E) = -E(\overline{K}+\overline{L}),\ \ \mathsf{S}(F) = -(K+L)F. \tag{62}$$

На образующих алгебры $U^{(bialg)}_{K,L,twist}$ имеем

$$(\mathsf{id}\star\mathsf{S})(K)=(\mathsf{S}\star\mathsf{id})(K)=(\mathsf{S}\star\mathsf{id})(\overline{K})=(\mathsf{id}\star\mathsf{S})(\overline{K})=\mathbf{1}, \tag{63}$$

$$(\mathsf{id}\star\mathsf{S})(L)=(\mathsf{S}\star\mathsf{id})(L)=(\mathsf{S}\star\mathsf{id})(\overline{L})=(\mathsf{id}\star\mathsf{S})(\overline{L})=0, \tag{64}$$

$$(\mathsf{id}\star\mathsf{S})(E)=(\mathsf{S}\star\mathsf{id})(E)=(\mathsf{S}\star\mathsf{id})(F)=(\mathsf{id}\star\mathsf{S})(F)=0. \tag{65}$$

Обобщение техники из [38, стр. 35] позволяет продолжить нужные соотношения на всю алгебру. Заметим, что соотношения $(\mathsf{id}\star\mathsf{S})(X)=(\mathsf{S}\star\mathsf{id})(X)=\varepsilon(X)\cdot\mathbf{1}$ имеют место для любого $X\in U^{(bialg)}_{K,L,twist}$. Таким образом, $U^{(Hopf)}_{K,L}\overset{def}{=}(U^{(bialg)}_{K,L,twist},\mathsf{S})$ является алгеброй Хопфа, а $U^{(vN-Hopf)}_{K,L}\overset{def}{=}(U^{(bialg)}_{K,L,norm},\mathsf{T})$ является алгеброй фон Неймана-Хопфа.

КВАЗИКОММУТАТИВНЫЕ БИАЛГЕБРЫ ПРИ $q^n=1$ И ОБОБЩЕННЫЕ R-МАТРИЦЫ

Перейдем к рассмотрению некоторых универсальных R-матриц специального вида для $U^{(vN-Hopf)}_{K,L}$ и $U^{(Hopf)}_{K,L}$. Чтобы избежать необходимости работы с формальными рядами (что является стандартной ситуацией для R-матриц общего вида), мы обратимся к рассмотрению квазикоммутативных биалгебр [48]. Такие биалгебры порождают R-матрицы сравнительно простого вида, допускающие (при некоторых дополнительных предположениях) описание явными формулами [38, 48].

Напомним, что биалгебра $U^{(bialg)}=(C,B,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ называется квазикоммутативной, если существует обратимый элемент $R\in U^{(bialg)}\otimes U^{(bialg)}$, называемый универсальной R-матрицей, для которого [48]

$$\Delta^{cop}(b)=R\Delta(b)R^{-1},\qquad \forall b\in U^{(bialg)}, \tag{66}$$

где Δ^{cop} – противоположное коумножение в $U^{(bialg)}$, кроме того R-матрица квазикоммутативной биалгебры $U^{(bialg)}$ удовлетворяет соотношениям

$$(\Delta\otimes\mathrm{id}\,)(R)=R_{13}R_{23},\qquad (\mathrm{id}\,\otimes\Delta)(R)=R_{13}R_{12}, \tag{67}$$

где для $R=\sum_i s_i\otimes t_i$, $R_{12}=\sum_i s_i\otimes t_i\otimes\mathbf{1}$, и т.п. [37]. В дальнейшем мы предполагаем $q^n=1$, что противоположно по отношению к нашему предшествующему контексту.

Рассмотрим двусторонний идеал $I_{\mathfrak{sl}_2}$ в $U^{(alg)}_q(\mathfrak{sl}_2)$, порожденный $\{k^n-\mathbf{1},e^n,f^n\}$, наряду с соответствующей факторалгеброй $\widehat{U}^{(alg)}_q(\mathfrak{sl}_2)=U^{(alg)}_q(\mathfrak{sl}_2)\diagup I_{\mathfrak{sl}_2}$.

Следующий результат хорошо известен [48, стр. 230].

Универсальная R-матрица для $\widehat{U}^{(alg)}_q(\mathfrak{sl}_2)$ имеет вид

$$\widehat{R}=\sum_{0\le i,j,m\le n-1}A^{ij}_m(q)\cdot e^mk^i\otimes f^mk^j,\; A^{ij}_m(q)=\frac{1}{n}\frac{(q-q^{-1})^m}{[m]!}q^{\frac{m(m-1)}{2}+2m(i-j)-2ij}, \tag{68}$$

где $[m]!=[1][2]\dots[m]$, $[m]=(q^m-q^{-m})\diagup(q-q^{-1})$. Теперь используем вложение (39) для получения аналога этой теоремы для $U^{(Hopf)}_{K,L}$. Подобным образом, рассмотрим факторалгебру $\widehat{U}^{(Hopf)}_{K+L}=U^{(Hopf)}_{K,L}\diagup I^{(Hopf)}_{K+L}$, где двусторонний идеал $I^{(Hopf)}_{K+L}$ порожден множеством $\{K^n+L^n-\mathbf{1},E^n,F^n\}$. Тогда можно показать, что универсальная R-матрица для $\widehat{U}^{(Hopf)}_{K,L}$ имеет вид

$$\widehat{R}^{(Hopf)}_{K+L}=\sum_{0\le i,j,m\le n-1}A^{ij}_m(q)\cdot E^m(K^i+L^i)\otimes F^m(K^j+L^j). \tag{69}$$

Действительно, в силу морфизма $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}:\widehat{U}^{(alg)}_q(\mathfrak{sl}_2)\to\widehat{U}^{(Hopf)}_{K+L}$ индуцированного (39) и приведенного выше явного вида R-матрицы для $\widehat{U}^{(Hopf)}_{K,L}$, достаточно (ввиду обратимости R) проверить соотношение $\Delta^{cop}(b)\widehat{R}^{(Hopf)}_{K+L}=\widehat{R}^{(Hopf)}_{K+L}\Delta(b)$ для $b=K,\overline{K}$, поскольку Δ и Δ^{cop} являются морфизмами алгебр. Это сводится к проверке следующих равенств:

$$(K\otimes K+L\otimes L)(E^m(K^i+L^i)\otimes F^m(K^j+L^j))=(E^m(K^i+L^i)\otimes F^m(K^j+L^j))(K\otimes K+L\otimes L), \tag{70}$$

и

$$(\overline{K}\otimes\overline{K}+\overline{L}\otimes\overline{L})(E^m(\overline{K}^i+\overline{L}^i)\otimes F^m(\overline{K}^j+\overline{L}^j))=(E^m(\overline{K}^i+\overline{L}^i)\otimes F^m(\overline{K}^j+\overline{L}^j))(\overline{K}\otimes\overline{K}+\overline{L}\otimes\overline{L}), \tag{71}$$

с использованием коммутационных соотношений. Кроме того, (67) преобразуется посредством $\widehat{\mathbf{\Phi}}$ в нужные нам соотношения, поскольку $\widehat{R}_{K+L}^{(Hopf)}$ лежит в тензорном квадрате образа $\widehat{\mathbf{\Phi}}$.

Аналогичные соображения позволяют получить описание явного вида для универсальной R-матрицы в случае $U_{K,L}^{(vN-Hopf)}$. Рассмотрим факторалгебру $\widehat{U}_{K+L}^{(vN-Hopf)} = U_{K,L}^{(vN-Hopf)} \diagup I_{K+L}^{(vN-Hopf)}$, где двусторонний идеал $I_{K,L}^{(vN-Hopf)}$ порождается множеством $\{K^n + L^n - \mathbf{1}, E^n, F^n\}$. Тогда универсальная R-матрица для $\widehat{U}_{K+L}^{(vN-Hopf)}$ имеет вид

$$\widehat{R}_{K+L}^{(vN-Hopf)} = \sum_{0\le i,j,m\le n-1} A_m^{ij}(q) \cdot E^m(K^i + L^i) \otimes F^m(K^j + L^j). \tag{72}$$

Как видно из построения, приведенные нами R-матрицы удовлетворяют уравнению Янга-Бакстера [48].

Отметим, что $\widehat{R}_{K+L}^{(vN-Hopf)}$ не согласована с разложением в прямую сумму (40). Мы приведем другую концепцию R-матрицы, которая в нашем случае будет соответствовать разложению (40), однако, в отличие от описанного выше, будет необратима.

Назовем биалгебру $\widetilde{U}^{(bialg)} = (C, B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ почти квазикоммутативной, если существует элемент $\widetilde{R} \in \widetilde{U}^{(bialg)} \otimes \widetilde{U}^{(bialg)}$, который назовем универсальной почти-R-матрицей, такой, что

$$\Delta^{cop}(b)\widetilde{R} = \widetilde{R}\Delta(b), \qquad \forall b \in \widetilde{U}^{(bialg)},$$

где Δ^{cop} – противоположное коумножение в $\widetilde{U}^{(bialg)}$, а также элемент $\widetilde{R}^\dagger \in \widetilde{U}^{(bialg)} \otimes \widetilde{U}^{(bialg)}$ такой, что

$$\widetilde{R}\widetilde{R}^\dagger\widetilde{R} = \widetilde{R}, \qquad \widetilde{R}^\dagger\widetilde{R}\widetilde{R}^\dagger = \widetilde{R}^\dagger. \tag{73}$$

При этом $\widetilde{R}^\dagger$ является обратным Мура-Пенроуза для почти-R-матрицы $\widetilde{R}$ [45, 46]. Назовем почти квазикоммутативную биалгебру $\widetilde{U}^{(bialg)}$ сплетенной, если ее почти-R-матрица удовлетворяет (67).

Рассмотрим факторалгебру $\widehat{U}_{K,L}^{(vN-Hopf)} = U_{K,L}^{(vN-Hopf)} \diagup I_{K,L}^{(vN-Hopf)}$, где двусторонний идеал $I_{K,L}^{(vN-Hopf)}$ порождается множеством $\{K^n - P, L^n - Q, E^n, F^n\}$. Тогда универсальная почти-R-матрица для $\widehat{U}_{K,L}^{(vN-Hopf)}$ имеет вид

$$\widehat{R}_{K,L}^{(vN-Hopf)} = \widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)} + \widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)},$$

где

$$\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)} = \sum_{0\le i,j,m\le n-1} A_m^{ij}(q) \cdot E^m K^i \otimes F^m K^j, \widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)} = \sum_{0\le i,j,m\le n-1} A_m^{ij}(q) \cdot E^m L^i \otimes F^m L^j.$$

Заметим, что универсальная почти-R-матрица $\widehat{R}_{K,L}^{(vN-Hopf)}$ может быть также представлена в виде

$$\widehat{R}_{K,L}^{(vN-Hopf)} = (P \otimes P)\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)} + (Q \otimes Q)\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)}. \tag{74}$$

Действительно, как было показано выше, $U_{K,L}^{(vN-Hopf)}$ допускает разложение в прямую сумму (40), причем каждое прямое слагаемое изоморфно $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. После факторизации по идеалу $I_{K,L}^{(vN-Hopf)}$ получаем

$$\widehat{U}_{K,L}^{(vN-Hopf)} = PU_{K,L}^{(vN-Hopf)}P \diagup \left\{ I_{K,L}^{(vN-Hopf)} \cap PU_{K,L}^{(vN-Hopf)}P \right\} \tag{75}$$

$$+QU_{K,L}^{(vN-Hopf)}Q \diagup \left\{ I_{K,L}^{(vN-Hopf)} \cap QU_{K,L}^{(vN-Hopf)}Q \right\}. \tag{76}$$

Каждое прямое слагаемое в правой расти равенства (75) очевидным образом изоморфно $\widehat{U}_q^{(alg)}(\mathfrak{sl}_2)$, причем указанные изоморфизмы переводят $\mathbf{1} \in \widehat{U}_q^{(alg)}(\mathfrak{sl}_2)$ в P и Q, соответственно. Из явного вида R-матрицы для $\widehat{U}_q^{(alg)}(\mathfrak{sl}_2)$ следует, что каждое из слагаемых в (74) удовлетворяет условиям определения R-матрицы и (67), поэтому тем же свойством обладает и их сумма $\widehat{R}_{K,L}^{(vN-Hopf)}$. Кроме того, существуют $\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)\dagger}$, $\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)\dagger} \in \widehat{U}_{K,L}^{(vN-Hopf)} \otimes \widehat{U}_{K,L}^{(vN-Hopf)}$ такие, что

$$\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)}\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)\dagger} = \widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)\dagger}\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)} = P \otimes P,$$

$$\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)}\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)\dagger} = \widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)\dagger}\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)} = Q \otimes Q.$$

Следовательно, условие регулярности фон Неймана (73) выполнено для

$$\widehat{R}^{(vN-Hopf)} = \widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)} + \widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)},$$

поскольку $\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)}$, $\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)\dagger}$ и $\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)}$, $\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)\dagger}$ взаимно ортогональны.

РЕАЛИЗАЦИЯ В ВИДЕ СКРЕЩЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Покажем, как представить алгебры $U_{K,L,norm}^{(alg)}$ и $U_{K,L,twist}^{(alg)}$ в виде скрещенных произведений с инволютивным автоморфизмом. В терминах генераторов и соотношений конструкция выглядит следующим образом[1]. Добавим к списку образующих k, k^{-1}, e, f алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ генератор s, а к списку соотношений (3) — следующие соотношения

$$s^2 = \mathbf{1}, \quad sk = ks, \quad se = \varepsilon es, \quad sf = \varepsilon fs,$$

где $\varepsilon = +1$ для $U_{K,L,norm}^{(alg)}$ и $\varepsilon = -1$ для $U_{K,L,twist}^{(alg)}$. Тогда изоморфизм между двумя реализациями имеет вид

$$e \mapsto E, \quad f \mapsto F, \quad k \mapsto K + L, \quad k^{-1} \mapsto \overline{K} + \overline{L}, \quad s \mapsto K\overline{K} - L\overline{L},$$

а обратный изоморфизм выглядит следующим образом

$$E \mapsto e, F \mapsto f, K \mapsto k\frac{1+s}{2}, \overline{K} \mapsto k^{-1}\frac{1+s}{2}, L \mapsto k\frac{1-s}{2}, \overline{L} \mapsto k^{-1}\frac{1-s}{2}. \tag{77}$$

Для $U_{K,L,norm}^{(alg)}$ приведенное выше описание может быть обобщено на случай расширения алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, содержащего n попарно ортогональных идемпотентов $P_0, \ldots P_{n-1}$ так что $\sum\limits_{j=0}^{n-1} P_j = 1$. А именно, добавим списку образующих k, k^{-1}, e, f алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ генератор t, а к списку соотношений (3) — следующие соотношения

$$t^n = \mathbf{1}, \quad tk = kt, \quad te = et, \quad tf = ft.$$

Пусть θ — первообразный корень из единицы, например $\theta = e^{2\pi i/n}$, где i — мнимая единица. Положим

$$P_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\theta^j s\right)^k, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Можно проверить, что $P_j^2 = P_j$, $P_j P_l = 0$ для $j \neq l$, и $\sum\limits_{j=0}^{n-1} P_j = 1$.

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Ниже предлагается способ построения представлений алгебр $U_{K,L,norm}^{(alg)}$ и $U_{K,L,twist}^{(alg)}$ по известным конечномерным представлениям $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Пусть V — n-мерное векторное пространство и $\pi : U_q(\mathfrak{sl}_2) \to \operatorname{End} V$ является одним из представлений, описанных в [Kassel]. Рассмотрим векторное пространство удвоенной размерности $V \oplus V$. Построим представление $\Pi_{norm} : U_{K,L,norm}^{(alg)} \to \operatorname{End}\,(V \oplus V)$ алгебры $U_{K,L,norm}^{(alg)}$ следующим образом

$$\begin{aligned}
\Pi_{norm}(K) &= \begin{pmatrix} \pi(k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Pi_{norm}\left(\overline{K}\right) = \begin{pmatrix} \pi\left(k^{-1}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\Pi_{norm}(L) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi(k) \end{pmatrix}, \ \Pi_{norm}\left(\overline{L}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi\left(k^{-1}\right) \end{pmatrix}, \\
\Pi_{norm}(E) &= \begin{pmatrix} \pi(e) & 0 \\ 0 & \pi(e) \end{pmatrix}, \quad \Pi_{norm}(F) = \begin{pmatrix} \pi(f) & 0 \\ 0 & \pi(f) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что данное определение согласуется с соотношениями (3) и (37). Аналогично строится представление $\Pi_{twist} : U_{K,L,twist}^{(alg)} \to \operatorname{End}\,(V \oplus V)$ алгебры $U_{K,L,twist}^{(alg)}$

$$\begin{aligned}
\Pi_{twist}(K) &= \begin{pmatrix} \pi(k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Pi_{twist}\left(\overline{K}\right) = \begin{pmatrix} \pi\left(k^{-1}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\Pi_{twist}(L) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi(k) \end{pmatrix}, \ \Pi_{twist}\left(\overline{L}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi\left(k^{-1}\right) \end{pmatrix}, \\
\Pi_{twist}(E) &= \begin{pmatrix} 0 & \pi(e) \\ \pi(e) & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{twist}(F) = \begin{pmatrix} 0 & \pi(f) \\ \pi(f) & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отметим, что Π_{norm} есть прямая сумма двух представлений, в то время, как представление Π_{twist} согласуется с разложением Пирса алгебры $U_{K,L,twist}^{(alg)}$ (42).

---

[1]Мы благодарны П.Этингофу за идею этой конструкции.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе построены две новые биалгебры, содержащие $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ в качестве подалгебры, а также идемпотенты (и, значит, делители нуля). В некоторых частных случаях приведены явные формулы для R-матриц. Определено новое понятие почти-R-матрицы, удовлетворяющее условию регулярности фон Неймана. Аналогичным образом можно рассмотреть аналог $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ с подходящим, но более громоздким семейством идемпотентов. Также представляет интерес рассмотрение суперсимметричных вариантов указанных структур. Предположительно, этот подход упростит дальнейшее изучение биалгебр, распадающихся в прямые суммы, что представляет собой новый вариант обобщения стандартных алгебр Дринфельда-Джимбо.

Один из авторов (С.Д.) выражает благодарность Дж. Кунцу, П. Этингофу, В. Д. Гершуну, Л. Кауфману, У. Крамеру, Г. Ч. Куринному, Б. В. Новикову, Дж. Окнинскому, С. А. Овсиенко, Д. Радфорду, С. Рингелю, Дж. Сташифу, Е. Тафту, Т. Тиммерману, С. Л. Вороновичу за многочисленные полезные обсуждения. Второй автор(С.С.) признателен Х. Якобсену и О. А. Берштейн за плодотворные дискуссии. Оба автора весьма обязаны Л. Л. Ваксману[2] за многочисленные и полезные беседы о структуре квантовых универсальных обертывающих алгебр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Склянин Е., Фаддеев Л. Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля // ДАН СССР. - 1978. - Т. 243. - С. 1430–1433.
2. Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фадеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи I // Теор. и матем. физика. - 1979. - Т. 40. - № 2. - С. 194–220.
3. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ-модель Гейзенберга // Успехи мат. наук. - 1979. - Т. 34. - № 5. - С. 13–63.
4. Дринфельд В. Г. Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга-Бакстера // ДАН СССР. - 1985. - Т. 282. - С. 1060–1064.
5. Jimbo M. A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation // Lett. Math. Phys. - 1985. - V. 10. - P. 63–69.
6. Дринфельд В. Г. Квантовые группы // Труды Зап. научных семинаров ЛОМИ. - Т. 155 - Л. Наука 1986. С. 18–49.
7. Jimbo M. Quantum R-matrix for the generalized Toda system: an algebraic approach // Proc. Field theory, Quantum Gravity and Strings. - V. 246 of Lecture Notes Phys. - Berlin. Springer 1986. .- P. 335–361.
8. Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантование групп Ли и алгебр Ли // Алгебра и анализ. - 1989. - Т. 1. - С. 178–206.
9. Woronowicz S. L. Pseudospaces, pseudogroups, and Pontryagin duality // Proc. Proceedings of the International Conference on mathematics and Physics, Lausanne 1979. - V. 116 of Lecture Notes in Physics - Berlin. Springer 1980. .- P. 407–412.
10. Woronowicz S. L. Compact matrix pseudogroups // Commun. Math. Phys. - 1987. - V. 111. - № 4. - P. 613–665.
11. Woronowicz S. L. A remark on compact matrix quantum groups // Lett. Math. Phys. - 1991. - V. 21. - P. 35–39.
12. Dijkhuizen M. S., Koornwinder T. H. CQG algebras: a direct algebraic approach to quantum groups // Lett. Math. Phys. - 1994. - V. 32. - P. 315–330.
13. Daele A. V. The Haar measure on a compact quantum group // Proc. Amer. Math. Soc. - 1995. - V. 123. - № 10. - P. 3125–3128.
14. Taft E. J. The order of the antipode of fnite-dimensional Hopf algebra // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. - 1971. - V. 68. - № 511. - P. 2631–2633.
15. Radford D. A free rank 4 Hopf algebra with antipode of order 4 // Proc. Amer. Math. Soc. - 1971. - V. 30. - № 1. - P. 55–58.
16. Turaev V. G. Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds. - Berlin: W. de Greuter, 1994.
17. Kassel C., Turaev V. Double construction for monoidal categories // Acta Math. - 1995. - V. 175. - P. 1–48.
18. Joyal A., Street R. Braided tensor categories // Adv. Math. - 1993. - V. 102. - P. 20–78.
19. Lyubashenko V. Tangles and Hopf algebras in braided categories // J. Pure Appl. Algebra. - 1995. - V. 98. - P. 245–278.
20. Lyubashenko V. Modular transformations for tensor categories // J. Pure Appl. Algebra. - 1995. - V. 98. - P. 279–327.
21. Alvares-Gaumé L., Gomes C., Sierra G. Quantum group interpretation of some conformal field theory // Phys. Lett. B. - 1989. - V. 220. - P. 142–152.
22. Pasquier V., Saleur H. Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups // Nucl. Phys. B. - 1990. - V. 330. - P. 523–556.
23. Abe E. Hopf Algebras. - Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. - 221 p.
24. Sweedler M. E. Hopf Algebras. - New York: Benjamin, 1969. - 336 p.
25. Connes A. Noncommutative Geometry. - New York: Academic Press, 1994. - 674 p.
26. Madore J. Introduction to Noncommutative Geometry and its Applications. - Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
27. de Boer J., Grassi P. A., van Nieuwenhuizen P. Non-commutative superspace from string theory // Phys. Lett. - 2003. - V. B574. - P. 98–104.
28. Gracia-Bondia J. M., Varilly J. C., Figueroa H. Elements of noncommutative geometry. - Boston: Birkhaeuser, 2001. - 685 p.
29. Seiberg N., Witten E. String theory and noncommutative geometry // J. High Energy Phys. - 1999. - V. 9909. - P. 032.

[2] см. http://webusers.physics.umn.edu/~duplij/vaksman

30. Wess J., Bagger J. Supersymmetry and Supergravity. - Princeton: Princeton Univ. Press, 1983. - 216 p.
31. Gates S. J., Grisaru M. T., Rocek M., Ziegel W. Superspace, or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry. - Reading: Benjamin, 1983. - 546 p.
32. Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. - М.: Изд-во МГУ, 1983. - 208 с.
33. Rabin J. M. Super elliptic curves // J. Geom. and Phys. - 1995. - V. 15. - P. 252–280.
34. Дуплий С. А. Полусупермногообразия и полугруппы. - Харьков: Крок, 2000. - 220 с.
35. Дуплий С. А., Котульская О. И. Суперматричные Структуры И Обобщенные Обратные // Вестник ХНУ, сер. "Ядра, частицы, поля". - 2002. - № 548.- Вып. 1(17). - С. 3–14.
36. Pierce R. S. Associative algebras. - New York: Springer-Verlag, 1982.
37. Drinfeld V. G. On almost cocommutative Hopf algebras // Leningrad Math. J. - 1989. - V. 1. - P. 321–342.
38. Jantzen J. C. Lectures on Quantum Groups. - Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1996. - 266 p.
39. Duplij S., Li F. Regular solutions of quantum Yang-Baxter equation from weak Hopf algebras // Czech. J. Phys. - 2001. - V. 51. - № 12. - P. 1306–1311.
40. Li F., Duplij S. Weak Hopf algebras and singular solutions of quantum Yang-Baxter equation // Commun. Math. Phys. - 2002. - V. 225. - № 1. - P. 191–217.
41. Chari V., Pressley A. A Guide to Quantum Groups. - Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
42. Drinfeld V. G. Quantum groups // Proceedings of the ICM, Berkeley. - Phode Island. AMS, 1987. - P. 798–820.
43. De Concini C., Kac V. Representations of quantum groups at roots of 1 // Operator Algebras, Unitary Representations, Envelopping Algebras and Invariant Theory. - Boston-Basel-Berlin. Birkhäuser, 1990. - P. 471–506.
44. Joseph A., Letzter G. Local finiteness for the adjoint action for quantized enveloping algebras // J. Algebra. - 1992. - V. 153. - P. 289–318.
45. Nashed M. Z. Generalized Inverses and Applications. - New York: Academic Press, 1976. - 321 p.
46. Rao C. R., Mitra S. K. Generalized Inverse of Matrices and its Application. - New York: Wiley, 1971. - 251 p.
47. Campbell S. L., Meyer C. D. Generalized Inverses of Linear Transformations. - Boston: Pitman, 1979. - 272 p.
48. Kassel C. Quantum Groups. - New York: Springer-Verlag, 1995. - 531 p.

QUANTUM UNIVERSAL ENVELOPING ALGEBRAS WITH IDEMPOTENTS AND THE PIERCE DECOMPOSITION

S.A. Duplij[1], S.D. Sinel'shchikov[2]
[1]*Department of Physics and Technology, V.N. Karazin Kharkov National University, Svoboda Sq. 4, Kharkov 61077, Ukraine*
[2]*Mathematics Division B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering Kharkov 61103, Ukraine*

This work introduces quantum bialgebras, which differ from the standard $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ by presence of von Neumann regular Cartan-like generators and the associated idempotents. Both invertible and von Neumann regular antipodes on such bialgebras are presented explicitly; the latter case leads to a von Neumann-Hopf algebra structure. Also, explicit forms of some particular R-matrices (also invertible and von Neumann regular) are presented, and the latter respects the Pierce decomposition. Some finite dimensional representations for those algebras are constructed.
KEY WORDS: bialgebra, antipode, Hopf algebra, R-matrix, idempotent, Pierce decomposition, von Neumann regularity